ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THANH TÙNG

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐA GIÁC LƯỠNG TÂM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THANH TÙNG

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐA GIÁC LƯỠNG TÂM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **60 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN VIỆT CƯỜNG

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Lời nói đầu 1

1 Tam giác lưỡng tâm và tứ giác lưỡng tâm **3**

1.1 Tam giác lưỡng tâm 3

1.1.1 Tính chất của tam giác lưỡng tâm 3

1.1.2 Khoảng cách giữa tâm của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp 8

1.2 Tứ giác lưỡng tâm 16

1.2.1 Tính chất của tứ giác lưỡng tâm 16

1.2.2 Diện tích của tứ giác lưỡng tâm 36

2 Đa giác lưỡng tâm và ứng dụng **39**

2.1 Đa giác lưỡng tâm 39

2.1.1 Tính chất của đa giác lưỡng tâm 39

2.1.2 Mối quan hệ giữa n-giác lưỡng tâm và $2n$-giác lưỡng tâm với đường tròn bàng tiếp 41

2.2 Một số ứng dụng 45

2.2.1 Bài toán của Fuss về tứ giác lưỡng tâm 45

2.2.2 Định lý Poncelet về đa giác lưỡng tâm 50

2.2.3 Một số bài tập ứng dụng trong chương trình phổ thông 57

Kết luận 63

Tài liệu tham khảo 64

Danh sách hình vẽ

1 Đa giác lưỡng tâm 1
a Tam giác lưỡng tâm 1
b Tứ giác lưỡng tâm 1

1.1 Tam giác có đường tròn ngoại tiếp (O, R), các cạnh có độ dài a, b, c thỏa mãn $c \geq b \geq a$. 4
1.2 Tam giác ABC với các cạnh có độ dài $c \geq b \geq a$. 6
1.3 Đường cao có độ dài h được kẻ từ C xuống cạnh AB. . . 7
1.4 9
1.5 11
1.6 12
1.7 13
1.8 15
1.9 16
1.10 17
1.11 18
1.12 20
1.13 21
1.14 22
1.15 24
1.16 24
1.17 25
1.18 25
1.19 26
1.20 26
1.21 27
1.22 28
1.23 29

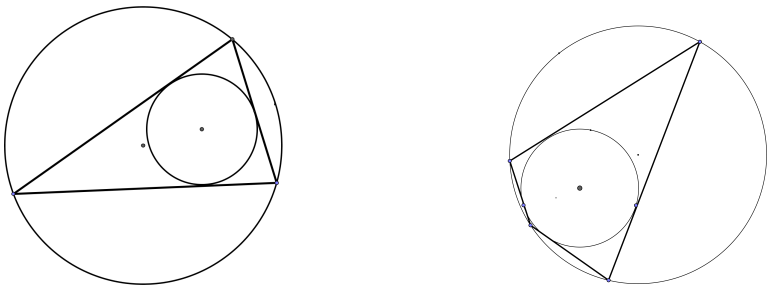
1.24 30
1.25 31
1.26 32
1.27 33
1.28 34
1.29 35

2.1 46
2.2 47
2.3 48
2.4 49
2.5 50
2.6 51
2.7 51
2.8 52
2.9 Các tứ giác lưỡng tâm nội tiếp vòng tròn lớn và ngoại tiếp vòng tròn bé. 53
2.10 Các lục giác lưỡng tâm nội tiếp vòng tròn lớn và ngoại tiếp vòng tròn bé. 53
2.11 Các bát giác lưỡng tâm nội tiếp vòng tròn lớn và ngoại tiếp vòng tròn bé. 54
2.12 Các thập giác lưỡng tâm nội tiếp vòng tròn lớn và ngoại tiếp vòng tròn bé. 54
2.13 Bàn bi-a tròn với chướng ngại vật hình tròn ở giữa. 55
2.14 Bàn bi-a tròn với lỗ tròn ở giữa. 55
2.15 55
2.16 55
2.17 Tiếp tuyến tại điểm tiếp xúc của quả bi-a với đường tròn lớn. 56
2.18 56
2.19 57
2.20 58
2.21 59
2.22 61

Lời nói đầu

Trong lĩnh vực hình học sơ cấp, các vấn đề về đa giác lưỡng tâm là một trong những chủ đề hấp dẫn và nhắc đến thường xuyên. Một số bài toán về đa giác lưỡng tâm đã được xếp trong lớp những bài toán kinh điển về hình học, chẳng hạn như bài toán của Fuss hay các định lý của Poncelet về đa giác lưỡng tâm. Khái niệm một đa giác lưỡng tâm $\mathcal{P}$ trong không gian $\mathbb{R}^2$ được phát biểu như sau:

Đa giác $\mathcal{P}$ được gọi là một đa giác lưỡng tâm nếu tồn tại đồng thời một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp ứng với $\mathcal{P}$ (xem Hình 1).



(a) Tam giác lưỡng tâm **(b)** Tứ giác lưỡng tâm

Hình 1: Đa giác lưỡng tâm

Trong luận văn này, mục tiêu của chúng tôi là trình bày lại một cách có hệ thống các kết quả, cũng như một số tính chất thú vị về đa giác lưỡng tâm. Nội dung của luận văn gồm hai chương.

Trong chương thứ nhất, chúng tôi trình bày về khái niệm, tính chất của tam giác lưỡng tâm và tứ giác lưỡng tâm. Nội dung của chương chủ yếu xoay quanh việc tìm hiểu các tính chất nếu lên mối quan hệ giữa bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp và khoảng cách giữa hai tâm. Bên cạnh đó, một số công thức thú vị để tính diện tích của

tứ giác lưỡng tâm cũng được trình bày cụ thể.

Tiếp theo, trong chương thứ hai, chúng tôi trình bày các tính chất về đa giác lưỡng tâm cùng với mối quan hệ giữa bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp và khoảng cách giữa hai tâm. Ngoài ra, chúng tôi có trình bày lại mối quan hệ giữa giữa $n-$ giác lưỡng tâm và $2n-$ giác lưỡng tâm với đường tròn bàng tiếp của chúng. Cuối cùng, chúng tôi đề cập đến một số bài toán nổi tiếng về đa giác lưỡng tâm, đó là các bài toán của Fuss và Poncelet.

Yên Bái, tháng 5 năm 2016
Tác giả

Bùi Thanh Tùng

Chương 1

Tam giác lưỡng tâm và tứ giác lưỡng tâm

Trong Chương 1, chúng tôi trình bày khái niệm, một số tính chất, công thức căn bản về tam giác lưỡng tâm và tứ giác lưỡng tâm.

1.1 Tam giác lưỡng tâm

Từ những kiến thức ở hình học sơ cấp, chúng ta đã biết rằng mọi tam giác $\mathcal{T}$ đều có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp tương ứng với nó. Do đó, mọi đa giác là tam giác đều là tam giác lưỡng tâm. Trong mục này, chúng tôi xin đưa ra các tính chất đẹp của tam giác lưỡng tâm.

1.1.1 Tính chất của tam giác lưỡng tâm

Các tính chất thú vị về tam giác lưỡng tâm chủ yếu xoay quanh hai đại lượng, đó là bán kính ngoại tiếp R và bán kính nội tiếp r, vì vậy trong phần này chúng tôi sẽ đưa ra các mối liên hệ, cách tính R và r. Với trường hợp đường tròn ngoại tiếp tam giác $\mathcal{T}$, có độ dài các cạnh lần lượt là a, b, c, các công thức sin cho phép ta tính toán độ dài bán kính R một cách thuận lợi. Ta có thể biểu diễn R là một hàm với các độ dài a, b, c.

Mệnh đề 1.1.1. ([4, tr. 2-3]) *Gọi $\mathcal{T}$ là tam giác có độ dài các cạnh lần lượt là a, b, c $(c \geq b \geq a)$. Khi đó, bán kính đường tròn ngoại tiếp R được*

tính bởi công thức sau

$$R = \frac{abc}{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Gọi A, B, C là các đỉnh của tam giác $\mathcal{T}$ thỏa mãn $AB = a, AC = b, BC = c$, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\mathcal{T}$, w là góc hợp bởi cạnh BC và OC, e là góc hợp bởi BC và OB, d là góc hợp bởi AC và OA, f là góc hợp bởi AB và OA (Hình 1.1). Ta có các công thức sau

$$\cos \widehat{w} = \frac{c}{2R}, \tag{1.2}$$

$$\widehat{w} = \widehat{e}, \quad \text{(tính chất tam giác cân)} \tag{1.3}$$

$$\widehat{C} + \widehat{w} = \widehat{d}, \tag{1.4}$$

$$\widehat{d} + \widehat{f} = \widehat{A}, \tag{1.5}$$

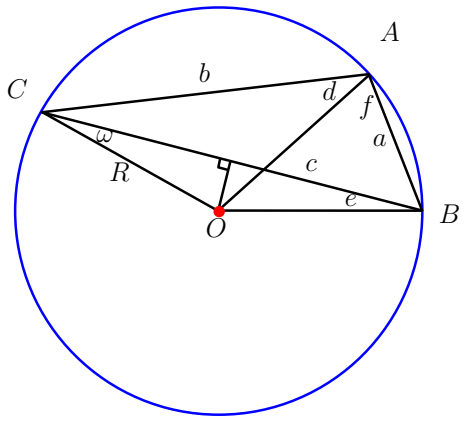
$$\widehat{e} + \widehat{B} = \widehat{f}. \tag{1.6}$$

Kết hợp (1.4) với (1.5) và biến đổi, ta thu được đẳng thức sau

$$\widehat{C} + \widehat{w} = \widehat{A} - \widehat{f}. \tag{1.7}$$

Kết hợp (1.3) với (1.6), ta có

$$\widehat{w} + \widehat{B} = \widehat{f}. \tag{1.8}$$



Hình 1.1: Tam giác có đường tròn ngoại tiếp (O, R), các cạnh có độ dài a, b, c thỏa mãn $c \geq b \geq a$.